S E S   2 0 1 2
Eighth Scientific Conference with International Participation
SPACE, ECOLOGY, SAFETY
4 – 6 December 2012, Sofia, Bulgaria

ТЕОРЕМА ЗА УСТОЙЧИВОСТ НА ДВИЖЕНИЕТО НА ЕКВАТОРИАЛЕН СПЪТНИК

Костадин Шейретски[1], Румен Шкевов[2], Николай Ерохин[3]

[1]Университет за национално и световно стопанство
[2]Институт за космически изследвания и технологии – Българска академия на науките
[3]Институт за космически изследвания – Руска академия на науките
e-mail: ksheiretsky@mail.space.bas.bg

Ключови думи: *небесна механика, теория на устойчивостта,хамилтонова механика*

Резюме: *Доказана е теорема за устойчивостта на движението на екваториален спътник на кръгова орбита под действието на гравитационен потенциал. Доказателството е направено на базата на теорема на Раус, посредством методите на Хамилтоновата механика. Определени са орбиталните параметри на спътника, при които движението е устойчиво.*

THEOREM FOR STABILITY OF EQUATORIAL SATELLITE MOTION

Kostadin Sheiretsky[1], Rumen Shkevov[2], Nikolay Erokhin[3]

[1]University of National and World Economy
[2]Space Research and Technology Institute – Bulgarian Academy of Sciences
[3]Space Research Institute – Russian Academy of Sciences
e-mail: ksheiretsky@mail.space.bas.bg

Keywords: *celestial mechanics, stability theory, Hamiltonian mechanics*

Abstract: *A theorem for stability of equatorial satellite motion on circular orbit under the influence of gravitational potential is being proved. The proof is on the bases of the Rouse Theorem, using Hamiltonian mechanics methods. Stable motion satellite orbital parameters are determined.*

Въведение

В настоящата работа е използван Хамилтоновия подход при изучаване на движенията на небесните тела [1]. Теорията на Хамилтоновите системи служи за основа на аналитичните и числените изследвания на движенията в небесната механика [2]. Поставена и успешно е решена математическата задача за устойчивост на движението на екваториален спътник по кръгова орбита, в гравитационно поле на сплесната при полюсите планета, като се използва теоремата на Раус.

Голям клас от механични системи не съдържат някои координати в израза за кинетичната си енергия, това са така наречените циклични координати. Останалите координати на системата се наричат позиционни. Следваме [3].

Нека $q_1 ... q_s$ са позиционните, а $\varphi_1 ... \varphi_m$ са цикличните координати. Уравненията на Лагранж за цикличните координати са

(1) $$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}_j} - \frac{\partial E_k}{\partial \varphi_j} = F_{\varphi_j}\ ,\ j = 1..m\ ,$$

където F_{φ_j} са обобщената сила, съответстващи на цикличната координата φ_j, E_k е кинетичната енергия на системата. Тъй като

(2) $$\frac{\partial E_k}{\partial \varphi_j} = 0 \text{ и } F_{\varphi_j} = 0$$

следва, че

(3) $$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}_j} = 0.$$

От уравненията на Лагранж следва, че обобщените импулси, съответстващи на цикличните координати остават постоянни през цялото време на движението

(4) $$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}_j} = p_{\varphi_j} = const..$$

Интегралите на движение (4) могат да се използват при съставянето на функцията на Раус по формулата:

(5) $$\tilde{R} = \tilde{E}_k - \sum_{l=1}^{m} p_{\varphi_l}\dot{\varphi}_l.$$

Теорема на Раус: Ако в стационарното движение потенциалната енергия на приведената система $W = U - \tilde{R}_0$ има минимум, тогава движението е устойчиво относително позиционните координати q_j и скорости $\dot{q}_j$, за смущения ненарушаващи стойностите на цикличните интеграли.

Изследване устойчивостта на стационарното движение на екваториален спътник на планета, посредством използването на функцията на Раус.

Решаването на поставената задача се осъществява по схемата предложена в монографията на Меркин [3].

Теорема. Ако спътник на планета се движи по кръгова орбита в поле с потенциал $U = -\frac{k}{R} - \frac{\alpha}{R^3}$, тогава стационарното движение е устойчиво по отношение на $R, \dot{R}, \theta, \dot{\theta}, \dot{\varphi}$ при условие за радиуса на орбитата $R_0 > \sqrt{\frac{3\alpha}{k}}$.

Доказателство:

Разглеждаме движението на спътника в сферична координатна система (R, θ, φ) с център O съвпадащ с центъра на планетата. Кинетичната енергия се представя с израза:

(6) $$E_k = \frac{m}{2}\left(\dot{R}^2 + R^2\dot{\theta}^2 + R^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right),$$

потенциала на полето има вида [4]:

(7) $$U = -\frac{k}{R} - \frac{\alpha}{R^3}$$

R-разстоянието от масовия център на спътника до O. $k = \gamma m(M + m)$, където γ е универсалната гравитационна константа, M - маса на планетата, m - маса на спътника, $\alpha = \varepsilon\frac{M R_e{}^2 \mu}{3}$, където R_e е екваториалния радиус на планетата, $\varepsilon = \frac{R_e - R_p}{R_e} - \frac{\omega^2 R_e}{g_e}$, R_p - полярния радиус на планетата, ω-ъглова скорост на въртене на планетата, g_e- планетно ускорение на екватора.

Цикличната координата φ съответства на интеграла

(8) $$p_\varphi = \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}} = mR^2\sin^2\theta\dot{\varphi} = const.$$

От уравнение (8) изразяваме $\dot{\varphi}$ и заместваме израза в уравнението за кинетичната енергия

(9) $$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mR^2 \sin^2\theta},$$

(10) $$E_k = \frac{m}{2}\left(\dot{R}^2 + R^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{p_\varphi{}^2}{2mR^2 \sin^2\theta}.$$

Образуваме функцията на Раус

(11) $$\tilde{R} = E_k - p_\varphi \dot{\varphi} = \frac{m}{2}\left(\dot{R}^2 + R^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{p_\varphi{}^2}{2mR^2 \sin^2\theta} - \frac{p_\varphi{}^2}{mR^2 \sin^2\theta}$$

Като извършим съответните преобразувания се получава

(12) $$\tilde{R} = \frac{m}{2}\left(\dot{R}^2 + R^2\dot{\theta}^2\right) - \frac{p_\varphi{}^2}{2mR^2 \sin^2\theta}$$

Функцията на Раус може да се представи като сбор от три функции

(13) $$\tilde{R}_1 = \frac{m}{2}\left(\dot{R}^2 + R^2\dot{\theta}^2\right),\ \tilde{R}_1 = 0,\ \tilde{R}_0 = -\frac{p_\varphi{}^2}{2mR^2 \sin^2\theta}$$

Определяме потенциалната енергия на приведената системата

(14) $$W = U - \tilde{R}_0 = -\frac{k}{R} - \frac{\alpha}{R^3} + \frac{p_\varphi{}^2}{2mR^2 \sin^2\theta}$$

Изразяваме условията за съществуване на стационарно движение:

$$\frac{\partial W}{\partial R} = \frac{k}{R^2} + \frac{3\alpha}{R^4} - \frac{p_\varphi{}^2}{mR^3 \sin^2\theta} = 0,$$

$$\frac{\partial W}{\partial \theta} = -\frac{p_\varphi{}^2 \cos\theta}{mR^2 \sin^3\theta} = 0.$$

(15)

Лесно се съобразява, че системата (15) се удовлетворява от следните стойности на променливите

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2},$$

$$R_0 = \frac{p_\varphi{}^2}{km} - \frac{3m}{p_\varphi{}^2}\alpha + O\left(\alpha^2\right).$$

(16)

В сила е и следното отношение за скоростта на въртенето на ридиус-вектора

(17) $$\dot{\varphi}_0 = \hat{\omega},\ \hat{\omega}^2 R_0{}^3 = \frac{k}{m} - \frac{3\alpha}{R_0{}^2 m}$$

Разглеждаме малки в сравнения с единицата отклонения от стационарното състояние на системата

(18) $$R = R_0 + \zeta,\ \theta = \frac{\pi}{2} + \eta$$

Разлагаме $W - W_0$ в ред на Тейлър, по степените на отклоненията от стационарните стойности на променливите

(19) $$W - W_0 = \left(\frac{\partial W}{\partial R}\right)_0 \xi + \left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)_0 \eta + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial R^2}\right)_0 \xi^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2}\right)_0 \eta^2 + 2\left(\frac{\partial^2 W}{\partial R \partial \theta}\right)_0 \xi\eta\right] + \ldots$$

Отчитат се уравнения (9) като израз (13) приема вида

(20) $$W - W_0 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial R^2}\right)_0 \xi^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2}\right)_0 \eta^2 + 2\left(\frac{\partial^2 W}{\partial R \partial \theta}\right)_0 \xi\eta\right] + \ldots$$

Частните производни в уравнение (20) имат вида

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial R^2}\right)_0 = -\frac{2k}{R_0{}^3} - \frac{12\alpha}{R_0{}^5} + \frac{3p_\varphi{}^2}{mR_0{}^4},$$

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial\theta^2}\right)_0 = \frac{{p_\varphi}^2}{m{R_0}^2},$$

(21) $$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial R\partial\theta}\right)_0 = 0.$$

Заместваме така намерените частни производни и се достига до израза

(22) $$W - W_0 = \frac{1}{2}\frac{k}{R_0}\left[\left(\frac{1}{{R_0}^2} - \frac{3\alpha}{k{R_0}^4}\right)\xi^2 + \left(1 + \frac{3\alpha}{k{R_0}^2}\right)\eta^2\right] + \ldots$$

От уравнение (22) се вижда, че функцията W има минимум за $R_0 > \sqrt{\frac{3\alpha}{k}}$ **,** понеже $W - W_0$ е положително определена функция и е непрекъсната по отношение на стойността на интеграла на цикличната променлива. В съответствие с теоремата на Раус твърдим, че стационарното движение с така зададените параметри на спътника е устойчиво по отношение на $R, \dot{R}, \theta, \dot{\theta}, \dot{\varphi}$.

Заключение

Посредством теоремата се доказва се, че при обичайните за Слънчевата система двойки планета – спътник (звезда – планета), кръговото движение в екваториалната равнина спътник е устойчиво. Конкретните параметри на условието за устойчивост на движението са от практическо значение за движениеята на изкуствените спътници. Резултатът може да се приложи и за търсенето на планети извън Слънчевата система, където например могат да бъдат наблюдавани планети с радиус близък до юпитеровия, но орбити доста по-близки до централното тяло [5].

Литература:

1. Д. Т е р Х а а р, Основы гамильтоновой механики. Наука. Москва, 1974.
2. П у а н к а р е, А. Лекции по небесной механике. Наука. Москва, 1965.
3. М е р к и н, Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения. Москва. Наука. 1987.
4. Б е л е ц к и й, В. В., Регулярные и хаотические движения твердых тел. Институт компьютерных исследований. Москва, 2007.
5. Ш е й р е т с к и, К., Н. Е р о х и н. Взаимосвязь между поступательным и вращательным движениями спутника по круговой орбите в центральном гравитационном поле MSS-09**,** Москва, 2009, с. 276-282.